Einfache lineare Gleichungen

Eine Gleichung, bei der man nur die elementaren Äquivalenzumformungen zum Lösen anwenden muss, bezeichnet man als einfache lineare Gleichung. Dabei ist weder ein Zusammenfassen von Termgliedern nötig, noch ein Ausmultiplizieren von Summen und Differenzen. Sie sind auch einfach zu lösen. Aus dem Lösungsalgorithmus für lineare Gleichungen müssen nur die letzten beiden Punkte verwendet werden: Die konstanten Termglieder auf diejenige Seite der Gleichung bringen, die frei von der gesuchten Variablen ist, und anschließend beide Seiten durch den Faktor vor der Variablen dividieren. Ein Beispiel aus dem Alltag soll dies veranschaulichen:

Sina meinte zu ihrem Freund: „Wenn wir zu fünft mit dem Taxi zur Disko fahren und du für uns alle den Eintritt dort auslegst, was musst du dann dafür an Kohle mitnehmen?“. „Dreiundfünfzig Neuronen“, meinte ihr Freund ganz trocken, „wobei das Taxi acht verlangt“. „Äh, was kostet dann eigentlich der Eintritt pro Person?“, fragte Sina nach.

Und schon wird Sinas Problem zu einem mathematischen. Man multipliziert den unbekannten Eintritt mit 5, da er für fünf Personen berechnet wird, addiert schließlich die 8 Euro Taxigebühr hinzu und erhält so die Gesamtausgabe in Höhe von 53 „Neuronen“, die ihr Freund bezahlen muss. Somit entsteht folgende Gleichung:

$$5 \cdot x + 8 = 53 \text{ (in Euro)}$$

Im ersten Schritt bringt man die Konstante 8 durch Subtraktion auf die andere Seite. der Gleichung (*also der Schritt Nummer 5 des Lösungsalgorithmus für lineare Gleichungen*).

$$\begin{aligned} & 5 \cdot x + 8 = 53 \quad \mid -8 \\ \Leftrightarrow \quad & 5 \cdot x + 8 - 8 = 53 - 8 \\ \Leftrightarrow \quad & 5 \cdot x = 45 \end{aligned}$$

Anschließend teilt man durch den Faktor 5 (*Schritt Nr. 6*), um die Variable zu isolieren.

$$\begin{aligned} & 5 \cdot x = 45 \quad \mid \div 5 \\ \Leftrightarrow \quad & 5 \cdot x \div 5 = 45 \div 5 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 9 \end{aligned}$$

Als Lösung erhält man also die Zahl 9, was in obigen Zusammenhang bedeutet, dass der Eintritt für die Diskothek 9 Euro pro Person kostet. Die Lösungsmenge ist also

$$\Rightarrow \quad L = \{9\} \text{ (in Euro).}$$

Ein weiteres Beispiel:

$$3-8\cdot z=15$$

Um die Variable z zu isolieren subtrahiert man zuerst die 3 auf beiden Seiten

$$
\begin{array}{lcl}
 & 3-8\cdot z=15 & |-3 \\
\Leftrightarrow & 3-8\cdot z-3=15-3 & \\
\Leftrightarrow & -8\cdot z=12 &
\end{array}
$$

und dividiert die Gleichung anschließend durch -8.

$$
\begin{array}{lcl}
 & -8\cdot z=12 & |\div(-8) \\
\Leftrightarrow & -8\cdot z\div(-8)=12\div(-8) & \\
\Leftrightarrow & z=-1{,}5 & \\
\text{oder} & z=-\frac{3}{2} & \\
\Rightarrow & L=\{-1{,}5\} \text{ bzw. } L=\{-\frac{3}{2}\} &
\end{array}
$$

Man sollte ebenso gesehen haben, dass bei der Lösung dieser einfachen linearen Gleichungen immer zuerst das konstante Glied auf die andere Seite der Gleichung gebracht wird, um dann durch den Faktor vor der Variablen zu dividieren. Also erst die „Strichrechnung" und dann die „Punktrechnung", damit die Unbekannte isoliert wird.

Noch ein Schlussbeispiel zur Veranschaulichung:

$$
\begin{array}{lcl}
 & \frac{y}{7}-\frac{3}{14}=\frac{1}{2} & |+\frac{3}{14} \\
\Leftrightarrow & \frac{y}{7}-\frac{3}{14}+\frac{3}{14}=\frac{1}{2}+\frac{3}{14} & \\
\Leftrightarrow & \frac{y}{7}=\frac{5}{7} & |\cdot 7 \\
\Leftrightarrow & \frac{y}{7}\cdot 7=\frac{5}{7}\cdot 7 & \\
\Leftrightarrow & y=5 & \\
\Rightarrow & L=\{5\} &
\end{array}
$$

(*mit* $\frac{1}{2}+\frac{3}{14}=\frac{1\cdot 7+3}{14}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$)

Um allerdings mit dem Lösungsalgorithmus für lineare Gleichungen konform zu arbeiten, müsste die Gleichung erst mit dem Hauptnenner, in diesem Fall 14, multipliziert werden, damit alle Brüche verschwinden. Bei einfachen Gleichungen kann man aber allgemein darauf verzichten, ohne in große Schwierigkeiten zu geraten.

Im Folgenden trotzdem die Lösung dieser Gleichung mit der „Hauptnenner-Methode“:

$$\frac{y}{7}-\frac{3}{14}=\frac{1}{2} \quad |\cdot 14$$

$$14\cdot\left(\frac{y}{7}-\frac{3}{14}\right)=14\cdot\frac{1}{2}$$

$$14\cdot\frac{y}{7}-14\cdot\frac{3}{14}=7$$

$$2y-3=7 \quad |+3$$

$$2y-3+3=7+3$$

$$2y=10 \quad |\div 2$$

$$2y\div 2=10\div 2$$

$$\Leftrightarrow \quad y=5$$

$$\Rightarrow \quad L=\{5\}$$

Wie man leicht erkennen kann, ist dieser Lösungsweg ein wenig mühsamer, aber sehr wahrscheinlich sicherer.

Übungen:

a) $13x-41=232$

b) $2{,}75=4{,}15-0{,}8\beta$

c) $5+\frac{a}{4}=-\frac{5}{8}$

d) $24-\Psi\div 3=5$