Lineare Gleichungen mit Parametern

Neben den linearen Gleichungen mit einer Variablen bzw. einem Platzhalter existieren auch Gleichungen, die mehrere Unbekannte beinhalten. Dabei wird die Variable, die mithilfe von Äquivalenzumformungen isoliert werden muss, mit Gleichungsvariable bezeichnet. Die anderen Unbekannten nennt man Parameter oder auch Formvariablen. Formvariable auch deshalb, weil sie die Form der Gleichung bestimmen, wie z.B.

$$mx + t = c$$

oder auch

$$ax + b = 0.$$

Diese beiden bekannten Gleichungstypen entstanden, weil kluge Köpfe vor vielen Jahrhunderten Lösungsformeln für Gleichungen, die in ihrer Art immer gleich waren, entwickelten, damit sie nicht bei jeder Lösung dieser Gleichungen ausführliche und vielleicht auch zeitraubende Lösungsalgorithmen anwenden mussten. Die geniale „Faulheit" einiger Mathematiker erspart uns heute durch deren Lösungsformeln meist aufwendige Lösungswege. Am bekanntesten dürfte wohl die Lösungsformel für die allgemeine quadratische Gleichung sein.

Lineare Gleichungen mit Parametern löst man normalerweise mit dem zuständigen Lösungsalgorithmus. Dabei kann es unter gewissen Umständen aber zu Schwierigkeiten kommen. Dividiert man beispielsweise eine Gleichung durch einen Term, der einen Parameter enthält, so ist es notwendig, dafür zu sorgen, dass dieser Term nicht den Wert Null annehmen kann. Man muss somit vor der Division mit einer Fallunterscheidung dafür sorgen, dieses „Fiasko" auszuschließen.
In den folgenden Beispielen sind die Parameter wie auch die Variable über der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ definiert. Um Verwechslungen zwischen Gleichungsvariable und Formparameter auszuschließen, wird die Gleichungsvariable in den Aufgaben ausschließlich mit x bezeichnet. Wie üblich wird mit einfachen Beispielen begonnen und der Schwierigkeitsgrad nach und nach erhöht:

1)

$$a^2 = x - a(1 + a)$$

Um x zu isolieren, muss man nur die ausmultiplizierten konstanten Termglieder mithilfe der Addition auf die linke Seite der Gleichung bringen:

$$\Leftrightarrow \quad a^2 = x - a - a^2 \quad \Big| + a^2 + a$$
(erfordert noch keine Fallunterscheidung!)

$$\Leftrightarrow \quad 2a^2 + a = x$$

$$\Rightarrow \quad L = \{2a^2 + a\} \ \forall a \in IR .$$

Es kann auch durchaus vorkommen, dass trotz der Existenz von Parametern keine Fallunterscheidung notwendig ist.

Im nächsten Beispiel ist dies allerdings schon anders:

2)

$$a^2 x = 3a^2 - 2ab$$

Wenn der Faktor vor der Variablen $\boldsymbol{x}$ einen oder mehrere Unbekannte enthält, muss man, wie bereits erwähnt, eine Fallunterscheidung durchführen. Vor dem Dividieren stellt man dadurch einerseits sicher, dass dieser Faktor nicht den Wert Null annehmen kann. Andererseits untersucht man, welche Situation eintritt, falls der Faktor doch den Wert Null annimmt. Man geht wie nun folgend vor:

2a) $a \neq 0$, somit darf man durch $\boldsymbol{a}^2$ dividieren:

$$\Rightarrow \quad a^2 x = a(3a - 2b) \quad \Big| \div a^2$$
(die rechte Seite wurde faktorisiert)

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{a(3a - 2b)}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3a - 2b}{a}$$
(und der Quotient gekürzt)

$$\Rightarrow \quad L = \{\frac{3a - 2b}{a}\} \ \forall a \in IR \setminus \{-1\}.$$

2b) $a = 0$, nun würde ein Dividieren durch $\boldsymbol{a}^2$ gegen die mathematischen Rechengesetze verstoßen. Deshalb setzt man für $\boldsymbol{a}$ Null ein, um die Gleichung weiter zu untersuchen:

$$\Rightarrow \quad 0^2 \cdot x = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot b$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \cdot x = 0 .$$

$0 \cdot x = 0$ ist aber immer wahr, vollkommen egal, was man für $\boldsymbol{x}$ einsetzen würde. Man erhält somit eine allgemeingültige Aussage.

$$\Rightarrow \quad L = IR \ \ \textit{für} \ a = 0$$

Das folgende Beispiel beinhaltet zusätzlich binomische Formeln, um das Niveau leicht zu erhöhen:

3)

$$(b+1)x = 2b^2 - 2$$

Die konstanten Glieder stehen bereits auf der rechten Seite der Gleichung, so dass man nur noch durch den Faktor $(b+1)$ dividieren müsste, um die Variablen $\boldsymbol{x}$ vollständig zu isolieren. Nur könnte dieser Faktor den Wert Null annehmen, wenn man für den Parameter $\boldsymbol{b}$ die Zahl ***-1*** einsetzen würde. Folglich muss zur Lösung dieser Gleichung mit einer Fallunterscheidung begonnen werden:

3a) $\boxed{b \neq -1,}$ man darf nun beide Seiten der Gleichung durch $(b+1)$ dividieren:

$$\Rightarrow \quad (b+1)x = 2b^2 - 2 \qquad |\div(b+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2b^2 - 2}{b+1}$$

(der Zähler wird faktorisiert)

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2(b-1)(b+1)}{b+1}$$

(und der Quotienten vollständig gekürzt)

$$\Leftrightarrow \quad x = 2(b-1)$$

$$\Rightarrow \quad L = \{2(b-1)\} \quad \forall b \in IR \setminus \{-1\}.$$

3b) $\boxed{b = -1,}$ das bedeutet, man setzt für $\boldsymbol{b}$ die ***-1*** ein, da ein Dividieren durch $(b+1)$ jetzt nicht möglich ist:

$$\Rightarrow \quad (-1+1)x = 2(-1)^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \cdot x = 2 \cdot 1 - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \cdot x = 0$$

wie in der Lösung zu 2b) erhält man wiederum eine allgemeingültige Aussage

für $b = -1$:

$$\Rightarrow \quad L = IR \quad \textit{für } b = -1.$$

Im anschließenden Beispiel für lineare Gleichungen mit Parametern muss man erst einmal damit beginnen, die Gleichungsvariable $\boldsymbol{x}$ auf die linke Seite der Gleichung zu bringen und die konstanten Glieder –dazu zählen auch die Formvariablen, die nicht ein $\boldsymbol{x}$ als Faktor enthalten- auf die rechte Seite der Gleichung:

4)

$$px - p^2 - 1 = x - 2p \qquad | -x$$

$$\Leftrightarrow \quad px - x - p^2 - 1 = -2p \qquad | +p^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad px - x = -2p + p^2 + 1$$ *(die rechte Seite ordnen)*

$$\Leftrightarrow \quad x(p-1) = p^2 - 2p + 1$$ *(links wurde x ausgeklammert)*

$$\Leftrightarrow \quad x(p-1) = (p-1)^2$$ *(und die rechte Seite faktorisiert)*

Nun müsste man durch den Faktor $(p-1)$ dividieren, um $\boldsymbol{x}$ zu isolieren. Da aber für $p=1$ der Faktor den Wert Null annimmt, folgt wie in Aufgabe 2) und 3) eine Fallunterscheidung:

4a) $\boxed{p \neq 1}$, beide Seiten werden nun durch $(p-1)$ dividiert:

$$\Rightarrow \quad x(p-1) = (p-1)^2 \qquad | \div (p-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = p-1$$

$$\Rightarrow \quad L = \{p-1\} \quad \forall\, p \in IR \setminus \{-1\}.$$

4b) $\boxed{p = 1}$, also ist ein Dividieren durch $(p-1)$ nicht möglich. Man setzt wiederum $p=1$ ein:

$$\Rightarrow \quad x(1-1) = (1-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \cdot x = 0$$

und erhält eine allgemeingültige Aussage für $p=1$:

$$\Rightarrow \quad L = IR \;\; für \;\; p = 1.$$

Im abschließenden Beispiel wird der Schwierigkeitsgrad nochmals erhöht. Man hat hier einen linearen Gleichungstyp, der in einer Prüfung vielleicht die sogenannte „100%-Bremse“ darstellen könnte. Konzentriert wendet man Schritt für Schritt das bisher Erlernte (Lösungsalgorithmus für lineare Gleichungen und Fallunterscheidung bei Formvariablen) an und lässt sich nicht gleich durch die komplexe Form der Gleichung lassen.

Die einzige Vorraussetzung für die Gleichung ist, dass die Formvariablen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ nicht den Wert Null annehmen können (,also $a,b \in IR \setminus \{0\}$), da sonst die Gleichung nicht definiert ist.

Begonnen wird mit dem Multiplizieren des Hauptnenners:

5)
$$\frac{x-a}{a}+\frac{ax-b^2}{b^2}=\frac{a^4+b^4}{(ab)^2} \qquad |\cdot a^2b^2$$
$$\Leftrightarrow \quad ab^2(x-a)+a^2(ax-b^2)=a^4+b^4$$
$$\Leftrightarrow \quad ab^2x-a^2b^2+a^3x-a^2b^2=a^4+b^4$$
$$\Leftrightarrow \quad ab^2x+a^3x-2a^2b^2=a^4+b^4 \qquad |+2a^2b^2$$
$$\Leftrightarrow \quad ab^2x+a^3x=a^4+2a^2b^2+b^4$$
$$\Leftrightarrow \quad ax(a^2+b^2)=(a^2+b^2)^2$$

Da aber die Vorraussetzung für die Gleichung $a,b\in IR\setminus\{0\}$ ist, kann sowohl der Term (a^2+b^2) als auch der Faktor $\boldsymbol{a}$ niemals den Wert Null annehmen. Man löst somit überraschenderweise die Gleichung ohne eine Fallunterscheidung:

$$\Rightarrow \quad ax(a^2+b^2)=(a^2+b^2)^2 \qquad |\div a(a^2+b^2)$$
$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{a^2+b^2}{a}$$
$$\Rightarrow \quad L=\left\{\frac{a^2+b^2}{a}\right\} \quad mit\ a,b\in IR\setminus\{0\}.$$

Übungen:

a) $7a-3b+c-x=2b-3c$

b) $4a^2x-4ax=a-x$

c) $(x-m)(mx+2)+(1+mx)(2m-x)+m^4=1$

d) $\frac{2mx+n}{2m+n}+\frac{2m-nx}{2m-n}+\frac{2n^2(x+1)}{4m^2-n^2}=0$

