Definitionsmenge

In einer Gleichung kann es zu Rechenoperationen kommen, die als solche nicht definiert sind. Man darf zum Beispiel nicht durch die Zahl Null dividieren. Auch ist das Radizieren einer negativen Zahl über der Menge der reellen Zahlen ***IR*** nicht erlaubt. Ebenso ist es nicht möglich, negative Zahlen und Null zu logarithmieren.
Existieren somit in Gleichungen Terme, in denen Brüche, Wurzeln oder Logarithmen vorkommen, so muss man immer darauf achten, wo die Variablen in den Termen stehen. Bei Brüchen darf der Nenner niemals den Wert Null annehmen. Es muss folglich ausgerechnet werden, ob und für welche Werte der Platzhalter dies verursachen könnte, um genau diese Werte dann von der Grundmenge auszuschließen. Es wird damit daher eine Menge gebildet, aus der man Elemente zur Termberechnung verwenden kann, ohne gegen die allgemeinen mathematischen Rechengesetze zu verstoßen. Diese Menge wird in der Mathematik mit Definitionsmenge bezeichnet und in der Schule meist mit ***D*** oder ***ID*** beschrieben. Sie ist immer eine Teilmenge der Grundmenge, $ID \subseteq G$.
Folgendes Beispiel soll dies nochmals veranschaulichen:

Die Gleichung lautet $$\frac{3-x}{x+4}+2=\frac{x}{x-1}, \qquad G=IR$$

die beiden Nenner dürfen nicht den Wert Null annehmen, also ist ein Einsetzen der Zahlen -4 bzw. 1 für die Variable x nicht möglich. Die Definitionsmenge lautet somit

$$ID = IR \setminus \{-4;1\}.$$

Ein weiteres Beispiel: $$\frac{1}{x}-\frac{(x+2)(x-3)}{x+2}-2=0, \qquad G=IR.$$

Auch hier darf der Nenner natürlich nicht den Wert Null annehmen, dass heißt, man muss die Zahlen 0 und 2 aus der Grundmenge ausschließen

$$\Rightarrow \qquad ID = IR \setminus \{0;2\}.$$

Wie bereits erwähnt, muss bei Wurzel- und Logarithmusgleichungen darauf geachtet werden, dass der Radikant, der Term unter der Wurzel, bzw. der Numerus, das zu logarithmierende Argument, nur positive Werte bzw. Werte, die größer Null sind, annehmen kann.

Beispiele für solche Gleichungen:

1) $\boxed{\sqrt{x-1}=x-2\ ,}$ der Radikant $x-1$ muss größer oder gleich Null sein, somit gilt: $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$. Es ergibt sich für die Definitionsmenge folgende Menge

$$\boxed{\Rightarrow \quad ID=\{x\in IR \mid x\geq 1\}=[1;\infty[}$$

nach neuer Schreibweise ID *= [1;* ∞*)*

2) $\boxed{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}=\sqrt{\frac{x-1}{4-x}}\ ,}$ somit muss gelten: $\frac{x+2}{x-2}\geq 0 \wedge \frac{x-1}{4-x}\geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (x\leq -2 \wedge x>2)\vee(1\leq x<4)$

$\Leftrightarrow \quad 2<x<4$

$$\boxed{\Rightarrow \quad ID=]2;4[}$$

nach neuer Schreibweise ID *= (2;4)*

3) $\boxed{\log_{10}(x-2)-\log_{10}(x+5)=2\ ,}$ beide Argumente größer Null setzen:

$x-2>0 \wedge x+5>0$

$\Leftrightarrow \quad x>2 \wedge x>-5$

$\Leftrightarrow \quad x>2$

$$\boxed{\Rightarrow \quad ID=]2;\infty[}$$

nach neuer Schreibweise ID *= (2;*∞*)*

4) $\boxed{\ln(x^2-1)\geq 4\ ,}$ den Numerus größer Null setzen:

$x^2-1>0$

$\Leftrightarrow \quad x^2>1$

$\Leftrightarrow \quad |x|>1$

$\Leftrightarrow \quad x<-1 \vee x>1$

$$\boxed{\Rightarrow \quad ID=]-\infty;-1[\cup]1;\infty[=IR\setminus[-1;1]}$$

Zusammenfassend lässt sich folgendes feststellen: Enthalten Terme von Gleichungen und Ungleichungen Variablen in Nennern (bei Brüchen), in Radikanten (bei Wurzeln) oder in Numera (bei Logarithmen), so ist mithilfe von Nebenrechnungen immer sicherzustellen, dass nur diejenigen Zahlen oder Zahlenbereiche zur weiteren Lösung der (Un-)Gleichung in der Definitionsmenge ***ID*** festgelegt werden, mit denen beim Einsetzen in die Terme zu keiner Zeit gegen die mathematischen Rechengesetze verstoßen wird. Im Übrigen wird immer stillschweigend die Grundmenge als Definitionsmenge angenommen, wenn keine derartigen Terme in der (Un-)Gleichung auftauchen.

Übungen:

a) $x-\sqrt{5-x}=\sqrt{x}$

b) $\log_2(x^2+1)=2+\log_2(x)$

c) $1-\frac{x+8}{x-4}=5+\frac{5}{x^2-x-12}$

d) $\sqrt{\frac{2x+1}{5-3x}}=\frac{1}{3}\sqrt{x^2-0{,}25}$

