Lineare Gleichungen - Lösungsalgorithmus

Gleichungen, die sich auf eine Variable ohne Exponent vereinfachen lassen, werden lineare Gleichungen genannt. Sie werden immer mithilfe der einfachen elementaren Äquivalenzumformungen gelöst. Es kann durchaus sein, dass eine Gleichung anfangs nicht als lineare Gleichung erkennbar ist. In den entsprechenden Jahrgangsstufen lässt sie sich aber sicherlich z.B. durch Anwendung der binomischen Formeln und Ausmultiplizieren von Summen und/oder Differenzen der verschiedenen Termglieder auf eine lineare zurückführen. Natürlich muss man die Rechentechniken aus der Arithmetik beherrschen, da sonst ein Scheitern schon zu Beginn der Äquivalenzumformungen droht.

Lineare Gleichungen löst man nach einem bestimmten mathematischen Lösungsalgorithmus, manche nennen es auch Kochrezept. Es ist eigentlich immer anwendbar, zumindest in folgenden Aufgaben.

Der nachstehende Gleichungstyp erschreckt die meisten Schüler, da er sowohl Brüche als auch Produkte von Summen und Differenzen und zu allem Übel eine binomische Formel enthält:

$$-\frac{1}{3}(2x-1)(x+2)+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}(3-x)^2$$

Man beginnt zuerst mit dem Auffinden und anschließenden Multiplizieren des Hauptnenners. Erfahrungsgemäß haben die meisten Schüler ein größeres Problem mit dem Bruchrechnen. Durch die elementare Äquivalenzumformung der Multiplikation wird dies damit vermieden. Den Hauptnenner findet man über das kgV der einzelnen Nenner der Gleichung. In diesem Fall: kgV(2;3;6)=6.

Somit multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung mit der Zahl 6.

$$-\frac{1}{3}(2x-1)(x+2)+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}(3-x)^2 \qquad |\cdot 6$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\cdot\left[-\frac{1}{3}(2x-1)(x+2)+\frac{1}{2}x^2\right]=6\cdot\left[\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}(3-x)^2\right]$$

Beim Ausmultiplizieren muss jetzt das Distributivgesetz beachtet werden, d.h. jeder Summand muss mit der Zahl 6 multipliziert werden, und gleichzeitig sollten die entsprechenden Brüche gekürzt werden. Nie die Vorzeichen vergessen!

$$\Leftrightarrow \quad -6\cdot\frac{1}{3}(2x-1)(x+2)+6\cdot\frac{1}{2}x^2=6\cdot\frac{1}{6}x^2+6\cdot\frac{1}{2}x-6\cdot\frac{1}{3}(3-x)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2(2x-1)(x+2)+3x^2 = x^2+3x-2(3-x)^2$$

Als nächsten Schritt löst man dann die Klammern auf. Also, Produkte von Summen und Differenzen ebenso wie binomische Formeln müssen beherrscht werden. Dabei sollten die Außenfaktoren noch vor den Klammern stehen bleiben.

$$\begin{aligned} & -2(2x-1)(x+2)+3x^2 = x^2+3x-2(3-x)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & -2(2x^2-x+4x-2)+3x^2 = x^2+3x-2(9-6x+x^2) \end{aligned}$$

In den Klammern die Terme zusammenfassen, die man auch zusammenfassen darf.

$$\Leftrightarrow \quad -2(2x^2+3x-2)+3x^2 = x^2+3x-2(9-6x+x^2)$$

Dann den Rest ausmultiplizieren, dabei die Vorzeichen beachten.

$$\Leftrightarrow \quad -4x^2-6x+4+3x^2 = x^2+3x-18+12x-2x^2$$

Jetzt wieder auf beiden Seiten der Gleichung die Terme zusammenfassen.

$$\Leftrightarrow \quad -x^2-6x+4 = -x^2+15x-18$$

Nun addiert man auf beiden Seiten x^2,

$$\begin{aligned} & -x^2-6x+4 = -x^2+15x-18 \qquad |+x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & -6x+4 = 15x-18 \end{aligned}$$

bringt alle x auf eine Seite der Gleichung, auf welche Seite ist egal,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & -6x+4 = 15x-18 \qquad |+6x \\ \Leftrightarrow \quad & 4 = 21x-18 \end{aligned}$$

alle Konstanten auf die andere Seite

$$\begin{aligned} & 4 = 21x-18 \qquad |+18 \\ \Leftrightarrow \quad & 22 = 21x \end{aligned}$$

und dividiert abschließend durch den Faktor, mit dem die Variable multipliziert wird.

$$\begin{aligned} & 22 = 21x \qquad |\div 21 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{22}{21} = x \end{aligned}$$

Nun hat man endlich die Lösung dieser Gleichung berechnet:

$$\Rightarrow \quad \mathrm{L} = \left\{\frac{22}{21}\right\}.$$

Zusammenfassend lässt sich die Lösung einer linearen Gleichung mit folgendem Algorithmus beschreiben:

Lösungsalgorithmus (Kochrezept) für lineare Gleichungen:

1. **Beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren**
2. **Klammern ausmultiplizieren, dabei immer von innen nach außen arbeiten**
3. **Jede Seite der Gleichung zusammenfassen** *(was man sowieso immer tun sollte)*
4. **Alle Summanden mit x auf eine Seite der Gleichung bringen**
5. **Alle Konstanten auf die andere Seite der Gleichung bringen**
6. **Durch den Faktor vorm x dividieren**

… und dabei immer auf die Vorzeichen achten!

Dieses System funktioniert erfahrungsgemäß immer. Wenn man allerdings mehrere Schritte gleichzeitig durchführt, schleichen sich häufiger Fehler ein. Auch sollte man immer darauf achten, dass man die richtigen Termglieder zusammenfasst. Eine saubere Heftführung erleichtert das Lösen ebenso, wie besonnenes, sorgfältiges und konzentriertes Vorgehen.

Nun viel Spaß und Erfolg bei den nachfolgenden Beiträgen.

