Lösungsmenge

Nachdem man bei Gleichungen und Ungleichungen auf Basis der Grundmenge die Definitionsmenge festgelegt hat, beginnt man mit dem Lösen dieser Aussageform. Man errechnet mit mathematischen Rechenoperationen somit diejenigen Werte der Variablen, für die die (Un-)Gleichung eine wahre Aussage ergibt.
In den meisten Fällen funktioniert das auch ohne weitere Komplikationen. Man erhält ein eindeutiges Ergebnis, z. B. bei linearen Gleichungen, oder auch mehrere Ergebnisse, z. B. bei quadratischen Gleichungen. Diese gibt man abschließend in einer Menge, der sogenannten Lösungsmenge an.
Dabei ist aber grundsätzlich darauf zu achten, dass die erhaltenen Lösungen auch definiert sind, d.h. sie müssen Elemente der Definitionsmenge oder Teilmengen sein. Gerade bei Bruch- und Wurzelgleichungen kann es hier zu Widersprüchen kommen.
Sollte die Lösung der (Un-)Gleichung nicht definiert sein oder die (Un-)Gleichung nach den Äquivalenzumformungen zu einer ungültigen Aussage führen, so gibt es damit auch keine Lösung dieser (Un-)Gleichung im mathematischen Sinn. Die Lösungsmenge ist somit leer, die (Un-)Gleichung unlösbar. Es kann vorkommen, dass Gleichungen allgemeingültig sind, die Variable eliminiert sich in solchen Fällen auf beiden Seiten der Gleichung. Das bedeutet, dass die Gleichung für alle Elemente der Definitionsmenge eine wahre Aussage ergeben, die Lösungsmenge folglich die Definitionsmenge bzw. die Grundmenge ist.
In den nachfolgenden Beispielen sollen diese Möglichkeiten veranschaulicht werden, wobei auf detaillierte Äquivalenzumformungen verzichtet wird.

Beispiele:

1) $x-2=3$ mit $ID=IR$

$\Leftrightarrow \quad x=5 \in ID$

$\Rightarrow \quad L=\{5\}$

2) $(x-3)(x+2)^2(x+5)=0$ mit $ID=IR$

$\Leftrightarrow \quad x=3 \vee x=-2 \vee x=-5$

$\Rightarrow \quad L=\{-5;-2;3\}$

3)
$$\frac{x^2+x-2}{x+2}=0 \qquad \text{mit } ID=IR\setminus\{-2\}$$
$$\Leftrightarrow \quad x=1 \vee x=-2\notin ID$$
$$\Rightarrow \quad L=\{1\}$$

4)
$$(x+2)(x-3)=(x+3)(x-4)+6 \qquad \text{mit } ID=IR$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2-x-6=x^2-x-12+6$$
$$\Leftrightarrow \quad 0=0 \;\; wahr\,\forall\, x\in ID$$
$$\Rightarrow \quad L=IR$$

5)
$$(x+2)(x-3)=(x+3)(x-4) \;\; \text{mit } ID=IR$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2-x-6=x^2-x-12$$
$$\Leftrightarrow \quad -6=-12 \;\; Widerspruch\,\forall\, x\in ID$$
$$\Rightarrow \quad L=\{\ \}$$

6)
$$\sqrt{x^2-2x}=x-1 \qquad \text{mit } ID=IR\setminus\,]0;2[\;\; bzw.\ (0;2)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2-2x=x^2-2x+1$$
$$\Leftrightarrow \quad 0=1 \;\; Widerspruch\,\forall\, x\in ID$$
$$\Rightarrow \quad L=\{\ \}$$

7)
$$\ln(x+6)-\ln(x+2)=\ln(x) \qquad \text{mit } ID=IR^+$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2+x-6=0$$
$$\Leftrightarrow \quad x=-3\notin ID \vee x=2$$
$$\Rightarrow \quad L=\{2\}$$

