Schwerste lineare Gleichungen

In den wohl schwersten Formen linearer Gleichungen kommen fast alle Rechentechniken in jeglicher Kombination vor, die man bis zu diesem Zeitpunkt in seiner Schullaufbahn schon erfahren hat. Natürlich lässt sich darüber streiten, ob dies oder das wirklich notwendig sei. Darum bitten wir darum, diesen Beitrag nur dann anzusehen und danach zu exzerpieren, wenn dies auch tatsächlich einen Sinn macht. In Prüfungen wird er eher sehr selten verlangt. Zum Feintuning seiner eigenen Fähigkeiten eignen sich die Beispiele und Übungen sehr wohl. Voraussetzungen für ein erfolgreiches Studieren dieses Beitrags sind ein selbstverständlicher Umgang mit binomischen Formeln, das Beherrschen aller Facetten des Bruchrechnens und ein hoher Grad an Konzentrationsfähigkeit. Kopfrechnen ist nicht zwingend notwendig, dem Taschenrechner sei Dank, aber äußerst nützlich.

Gelöst werden auch diese Gleichungstypen mit dem Lösungsalgorithmus für lineare Gleichungen. In folgenden Aufgaben wird in diesem Beitrag auf nicht erforderliche Zwischenschritte verzichtet, um noch einen Rest von Übersichtlichkeit zu erhalten.

Nun zum ersten Beispiel:

$$-\frac{2}{5}(1-\frac{3}{2}x)^2+0{,}25(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2})(3+0{,}75x)-\frac{1}{8}(7-6{,}7x^2)=(2-0{,}4x)(-\frac{1}{4}x)-\frac{1}{10}(x+\frac{4}{5})^2$$

Zunächst sollte man die Dezimalzahlen in Brüche verwandeln

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{5}(1-\frac{3}{2}x)^2+\frac{1}{4}(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2})(3+\frac{3}{4}x)-\frac{1}{8}(7-\frac{67}{10}x^2)=(2-\frac{2}{5}x)(-\frac{1}{4}x)-\frac{1}{10}(x+\frac{4}{5})^2$$

und anschließend die Binome auflösen bzw. die Summen und Differenzen ausmultiplizieren.

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{5}(1-3x+\frac{9}{4}x^2)+\frac{1}{4}(x-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{8}x)-\frac{1}{8}(7-\frac{67}{10}x^2)=(2-\frac{2}{5}x)(-\frac{1}{4}x)-\frac{1}{10}(x^2+\frac{8}{5}x+\frac{16}{25})$$

Jetzt multipliziert man die Gleichung mit dem Hauptnenner, das kgV(4;5;8;10)=40, derjenigen Faktoren, die vor den jeweiligen Summen und Differenzen stehen, und kürzt auch sofort.

$$\Leftrightarrow \quad -16(1-3x+\frac{9}{4}x^2)+10(\frac{5}{8}x-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}x^2)-5(7-\frac{67}{10}x^2)=(2-\frac{2}{5}x)(-10x)-4(x^2+\frac{8}{5}x+\frac{16}{25})$$

Die Klammern werden nun aufgelöst

$$\Leftrightarrow \quad -16+48x-36x^2+\frac{25}{4}x-15+\frac{5}{2}x^2-35+\frac{67}{2}x^2=-20x+4x^2-4x^2-\frac{32}{5}x-\frac{64}{25}$$

und wiederum beide Seiten mit dem neuen Hauptnenner (kgV(2;4;5;25)=100) multipliziert.

$$\Leftrightarrow \quad -1600+4800x-3600x^2+625x-1500+250x^2-3500+3350x^2=-2000x-640x-256$$

Schließlich fasst man beide Seiten jeweils zusammen,

$$\Leftrightarrow \quad 5425x-6600=-2640x-256 \qquad |+2640x$$

bringt die Variable auf die linke Seite der Gleichung,

$$\Leftrightarrow \quad 8065x-6600=-256 \qquad |+6600$$

das konstante Termglied auf die rechte Seite

$$\Leftrightarrow \quad 8065x=6344 \qquad |\div 8065$$

und dividiert abschließend durch den Faktor vor der Variablen x

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{6344}{8065}.$$

$$\Rightarrow \quad L=\{\frac{6344}{8065}\}$$

Der Rechenaufwand ist bei diesen Gleichungen enorm. Es lohnt sich jedoch immer systematisch den Lösungsalgorithmus bei diesen Aufgaben anzuwenden.

Ein weiteres Beispiel aus einer älteren Prüfung wird jetzt ohne Kommentare gelöst.

$$3k-\frac{1}{2}(1-2k)^2+\frac{k}{6}(2-\frac{3k}{2})(2+\frac{3k}{2})-\frac{1}{4}=\frac{k}{3}(\frac{1}{2}+2k)^2-\frac{1}{8}(\frac{41}{3}k+2)(k^2-5)-2\frac{5}{12}k^2 \qquad |\cdot 24$$

$$\Leftrightarrow \quad 72k-12(1-2k)^2+4k(2-\frac{3k}{2})(2+\frac{3k}{2})-6=8k(\frac{1}{2}+2k)^2-3(\frac{41}{3}k+2)(k^2-5)-58k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 72k-12(1-4k+4k^2)+4k(4-\frac{9}{4}k^2)-6=8k(\frac{1}{4}+2k+4k^2)-3(\frac{41}{3}k^3+2k^2-\frac{205}{3}k-10)-58k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 72k-12+48k-48k^2+16k-9k^3-6=2k+16k^2+32k^3-41k^3-6k^2+205k+30-58k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 136k-18-48k^2-9k^3=207k-48k^2-9k^3+30 \qquad |+48k^2+9k^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 136k-18=207k+30 \qquad |-136k$$

$$\Leftrightarrow \quad -18=71k+30 \qquad |-30$$

$$\Leftrightarrow \quad -48=71k \qquad |\div 71$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{48}{71}=k$$

$$\Rightarrow \quad L=\{-\frac{48}{71}\}$$

Erscheinen diese Aufgaben noch so schwer, mithilfe des Lösungsalgorithmus kommt man immer mit ein wenig Geduld an das Ziel. Zum Abschluss noch eine leichtere Aufgabe, die endlich eine „schöne“ Lösung ergibt:

	$\frac{1}{120}(9+2s)^2+\frac{1}{420}(4s-7)^2=\frac{1}{280}(5s+6)(5s-6)-\frac{1}{168}s(3s-11)+\frac{1}{105}$	$\lvert \cdot 840$
$\Leftrightarrow$	$7(9+2s)^2+2(4s-7)^2=3(5s+6)(5s-6)-5s(3s-11)+8$	
$\Leftrightarrow$	$7(81+36s+4s^2)+2(16s^2-56s+49)=3(25s^2-36)-15s^2+55s+8$	
$\Leftrightarrow$	$567+252s+28s^2+32s^2-112s+98=75s^2-108-15s^2+55s+8$	
$\Leftrightarrow$	$665+140s+60s^2=60s^2-100+55s$	$\lvert -60s^2$
$\Leftrightarrow$	$665+140s=-100+55s$	$\lvert -55s$
$\Leftrightarrow$	$665+85s=-100$	$\lvert -665$
$\Leftrightarrow$	$85s=-765$	$\lvert \div 85$
$\Leftrightarrow$	$s=-9$	
$\Rightarrow$	$L=\{-9\}$	

Übungen:

a) $23\frac{1}{7}+\frac{1}{7}(2x-39)^2-\frac{1}{2}(5-x)(5+x)-3\frac{5}{7}x^2=\frac{3}{14}x\left(4-\frac{1}{3}x\right)-\frac{2}{7}\left(\frac{5}{2}-3x\right)^2$

b) $\frac{5}{11}(\frac{3}{2}-\frac{y}{5})^2-\frac{11}{5}(\frac{y}{11}-2)^2+\frac{2561}{1650}=-\frac{1}{2}(\frac{2y}{11}-\frac{4}{5})^2-\frac{2}{11}(\frac{y}{3}-\frac{3}{2})(\frac{1}{5}-y)-\frac{63}{1100}+\frac{162y^2}{1815}$

c) $1{,}125(\Omega^2+1)^2-0{,}625\Omega^2(\Omega-0{,}5)(0{,}\overline{6}+\Omega)-\frac{5}{24}\Omega^3+0{,}8\overline{3}-\Omega^4=$

$$=-0{,}5(\Omega^2-2{,}5)^2-0{,}1\overline{6}(3{,}5\Omega-1)^2-\frac{167}{96}\Omega^2$$

d) $\frac{2}{5}(2q-3)^3+\frac{1}{4}(\frac{1}{3}-3q)^3-\frac{q^2}{180}(-37q+751)=$

$$=-3(q-\frac{1}{2})^2(q+\frac{1}{2})-\frac{1}{90}q(31q^2-988q)+\frac{37}{270}-\frac{3}{2}q$$